SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

N. GAROFALO

RISULTATI D'UNICITA' PER OPERATORI ELLITTICI

Parte I

28 MARZO 1985

§ 1. INTRODUZIONE E BREVI CENNI STORICI

In questa nota presentiamo un nuovo metodo per studiare proprietà di unicità di operatori ellittici del secondo ordine. Tale metodo si basa su un approccio geometrico-variazionale e non fa uso di stime a priori di tipo Carleman. I risultati esposti fanno parte di un lavoro in collaborazione con F.H. Lin, v. [GL].

In questo paragrafo diamo alcuni cenni su una delle motivazioni storiche dei risultati di unicità, nonché un resoconto della bibliografia esistente sull'argomento. Il § 2 è, invece, dedicato all'esposizione dei principali risultati in [GL] concernenti operatori in forma principale. In una nota successiva si studieranno operatori contenenti termine d'ordine inferiore a due.

Se u è una funzione analitica reale in un aperto connesso $\Omega \subset R^n$, e u si annulla con tutte le sue derivate in $x_0 \in \Omega$, allora $u \equiv 0$ in Ω. Una versione ad hoc di questa proprietà è valida per soluzioni di ampie classi di equazioni ellittiche del secondo ordine. Intanto, se $u \in L^2_{loc}(R^n)$ si dice che u *si annulla d'ordine infinito in* x_0 se

$$(1.1) \qquad \int_{|x-x_0|<R} u^2(x)dx = O(R^N) \quad , \quad \text{per ogni } n \in N.$$

E' ovvio che la (1.1) costituisce un'opportuna estensione dell'annullarsi, per una funzione regolare, con le derivate d'ogni ordine in un punto. Se L è un operatore differenziale su un aperto connesso $\Omega \subset R^n$ si dice che L ha la *proprietà d'unicità forte* se fra le sue possibili soluzioni l'unica che può annullarsi d'ordine infinito in un punto è quella identicamente nulla. Mentre si dice che L ha la *proprietà d'unicità debole*

se una soluzione di $Lu = 0$ non può annullarsi in un sottoinsieme aperto di Ω senza che sia $u \equiv 0$.

In questa nota e in una successiva ci occuperemo di equazioni del tipo

$$(1.2) \qquad Lu = -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + \langle \vec{b}(x), \nabla u \rangle + V(x)u = 0,$$

dove sulla matrice $A(x) = (a_{ij}(x))$, sul campo vettoriale $\vec{b}(x)$ e sulla funzione $V(x)$ si faranno opportune ipotesi. Il prototipo dell'equazione (1.2) che abbiamo in mente è fornito dall'operatore di Schrödinger stazionario

$$(1.3) \qquad H = -\Delta + V,$$

dove $-\Delta$ è l'energia cinetica e V l'energia potenziale di una particella non relativistica, v. [RS]. (1.3) si ottiene da (1.2) scegliendo $A(x) \equiv$ Identità e $\vec{b}(x) \equiv 0$.

In fisica matematica un problema di grande interesse è lo studio delle proprietà spettrali dell'operatore H. In particolare l'esistenza o meno di autovalori positivi, cioè $\lambda > 0$ per cui

$$(1.4) \qquad Hu = \lambda u$$

per qualche $u \in L^2(R^n)$. La ragione storica di tale rilevanza va ricercata nel fatto che Von Neumann pose il teorema spettrale alla base della sua formulazione assiomatica della meccanica quantistica, v. [RS]. La determinazione dell'esistenza o meno di autovalori positivi costituisce un problema molto complesso. Infatti, mentre l'intuizione fisica suggerirebbe che tali valori non possano esistere se V tende a zero all'infinito (e Oppenheimer si fidò di tale intuizione nella sua tesi a Gottinga nel

1927), un famoso esempio di Von Neumann e Wigner mostra il contrario, v. [VW].

Una strategia efficace che consente di eliminare la presenza di autovalori positivi si basa sui teoremi di unicità. Infatti, risultati di Kato, Agmon e altri (v. [Ka],$[A]_{1,2}$, e [RS]) consentono di affermare che *se H ha la proprietà d'unicità debole, allora H non ha autovalori positivi.*

Carleman per primo, nel 1939 (v. [C]), provò che l'operatore di Schrödinger (1.3), con $V \in L^\infty_{loc}$, ha in R^2 la proprietà di unicità forte. La sua idea originaria ha influenzato tutti gli sviluppi successivi. Il metodo di Carleman consiste nel provare stime a priori del tipo:

$$(1.5) \qquad \|e^{t\Phi}u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|e^{t\Phi}Lu\|_{L^q(\Omega)}, \quad u \in C^\infty_0(\Omega),$$

dove Ω è un aperto connesso di R^n, Φ è una opportuna funzione (convessa), $t \nearrow +\infty$ e C è una costante che non dipende da t. Nella (1.5) L è l'operatore differenziale di cui si vuol provare l'unicità. Sfortunatamente, una stima come la (1.5) è in generale difficile da provare, a causa della presenza del peso $e^{t\Phi}$ e del fatto che bisogna permettere al parametro t di tendere all'infinito.

Osserviamo esplicitamente che una stima come la (1.5) consente di provare proprietà di unicità per un'equazione del tipo $Lu + Vu = 0$, dove L è un opportuno operatore ellittico, in particolare $L = -\Delta$, e $V \in L^r_{loc}$, con $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. E' chiaro che se si prende $V \in L^\infty_{loc}$, allora basta stabilire la (1.5) con $p = q = 2$.

Negli anni 1954-55, Müller e Heinz (v. [Mu] e [He]) indipendentemente estesero il risultato di Carleman all'R^n per equazioni del tipo: $-\Delta u + \langle\vec{b},\nabla u\rangle + Vu = 0$, con $\vec{b}, V \in L^\infty_{loc}(R^n)$. Subito dopo (1956), Aronszajin e Cordes (v. [A] e [Co]) provarono stime L^2-L^2 di tipo Carleman, per un operatore L come in (1.2), dove $A(x) \in C^{2,1}$ (Aronszajin), oppure $A(x) \in C^2$

(Cordes), e $\vec{b}, V \in L^{\infty}_{loc}(R^n)$. I primi a rilassare notevolmente le restrizioni sulla regolarità dei coefficienti della parte principale furono Aronszajn, Krzywicki e Szarski, nel 1962.

In un lavoro tecnicamente complicato (v. [AKS]) essi provarono che l'operatore L in (1.2) con $A(x) \in C^{0,1}$, $\vec{b}$ e $V \in L^{\infty}_{loc}$, soddisfa una disuguaglianza del tipo (1.5) con $p = q = 2$. Ne deriva la proprietà d'unicità forte per L in tale classe.

Sorge spontanea la domanda: è possibile indebolire ulteriormente la regolarità della matrice A(x) senza però che $Lu = \mathrm{div}(A(x)\nabla u)$ perda la proprietà d'unicità (debole o forte)? Nel 1963 Plis ha dato un esempio che rende inutile ogni tentativo in questa direzione, v. [P]. Infatti, egli ha costruito un operatore uniformemente ellittico la cui parte principale ha coefficienti $C^{0,\alpha}$, con $\alpha \in (0,1)$ qualunque, per cui non vale la proprietà d'unicità debole. Perciò, la Lipschitzianità è l'ipotesi minimale perché si possa avere unicità. Ciò per quanto riguarda la parte principale dell'operatore. Finora, abbiamo supposto che il coefficiente di trasporto $\vec{b}(x)$ e il potenziale V(x) siano in L^{∞}_{loc}. D'altra parte, basta pensare al potenziale coulombiano per chiedersi: cosa succede se i termini d'ordine uno o zero in (1.2) sono singolari, nel senso che essi appartengono a qualche L^{p}_{loc}, con $1 \le p < \infty$?. Questa domanda, frutto di una naturale curiosità, introduce un ordine di difficoltà nuovo e elevato nello studio del problema dell'unicità. Infatti, ora non basta più provare una stima come la (1.5) con $p = q = 2$, ma è necessario che vi sia, al lato sinistro della (1.5), un effettivo guadagno. Per spiegare questo punto apriamo una parentesi. Nella (1.5) supponiamo che sia $\Omega = R^n$, $L = -\Delta$ e $\Phi \equiv 0$. Essa si riscrive

$$(1.6) \qquad \|u\|_{L^p(R^n)} \le C\|\Delta u\|_{L^q(R^n)}, \quad u \in C^{\infty}_{0}(R^n).$$

Ora siano $p = \frac{2n}{n-2}$, $q = \frac{2n}{n+2}$, di modo che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{2}{n}$. Allora, (1.6) non è altro che il teorema di Hardy-Littlewood-Sobolev, che dice che $H^{2,q}(R^n) \hookrightarrow L^p(R^n)$, insieme alla stima a priori

$$(1.7) \qquad \|D_{x_i x_j} u\|_{L^q(R^n)} \le C\|\Delta u\|_{L^q(R^n)},$$

conseguenza della continuità in L^q delle trasformate di Riesz, v. $[S]_1$. Un modo di provare il teorema di Hardy-Littlewood-Sobolev è usare l'interpolazione reale per stabilire la continuità fra spazi L^q-L^p dei potenziali frazionari $I_\alpha(u) = |\cdot|^{\alpha-n} * u$. E' quindi intuibile che nel tentativo di estendere la (1.6) al caso pesato della (1.5), l'interpolazione (reale o complessa) deve giocare un ruolo determinante.

Supponiamo ora che $u \in H^{2,q}_{loc}$ sia una soluzione di $Hu = -\Delta u + Vu = 0$. Ci chiediamo: qual'è lo spazio L^r_{loc} tale che, se $V \in L^r_{loc}$, quando in (1.6) si sostituisce Δu con Vu si ottiene un elemento di L^q_{loc}? Siccome per quanto richiamato più sopra $u \in L^p_{loc}$, bisogna determinare r in modo tale che $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, cioè dev'essere $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{2}{n}$. Si osservi che $q < 2 < p$.

Queste considerazioni avevano da lungo tempo portato a congetturare che l'operatore di Schrödinger (1.3) avesse la proprietà d'unicità (forte) quando in esso $V \in L^r_{loc}$, con $r \ge \frac{n}{2}$. Solo di recente, però, tale congettura è stata trasformata in teorema da D. Jerison e C. Kenig, che hanno provato la seguente stima di Carleman: $\forall u \in C^\infty_0(R^n \setminus \{0\})$

$$(1.8) \qquad \||x|^{-t}u\|_{L^p(R^n, \frac{dx}{|x|^n})} \le C\||x|^{-t+2}\Delta u\|_{L^q(R^n, \frac{dx}{|x|^n})}$$

dove $t \notin N$, e C dipende solo dalla distanza di t da N, v. [JK]. La prova della stima (1.8) di Jerison e Kenig è molto complicata. Essa fa uso pesante dell'analisi armonica del Laplaciano e dell'interpolazione complessa alla Stein. Successivamente, Stein [S] ha semplificato la dimostra-

zione in [JK] ottenendo il seguente miglioramento della (1.8): $\forall u \in C_0^\infty R^n \setminus \{0\}$

$$(1.9) \qquad \| |x|^{-t} u \|_{L^{p,q}(R^n)} \leq C \| |x|^{-t} \Delta u \|_{L^q(R^n)} .$$

Nella (1.9) $L^{p,q}$ rappresenta lo spazio di Lorentz di tipo (p,q). La (1.9) implica unicità forte per l'operatore di Schrödinger $H = -\Delta + V$, con $V \in L^{\frac{n}{2},\infty}_{loc}(R^n)$, lo spazio $L^{\frac{n}{2}}$-debole di Lorentz, e V soddisfacente certe restrizioni locali. Nell'ambito delle classi L^p per quanto concerne l'unicità forte il risultato di Jerison e Kenig è migliore possibile: infatti, $\forall p < \frac{n}{2}$ è possibile costruire $V \in L^p_{loc}$ tale che $Hu = -\Delta u + Vu$ ammette soluzioni non banali che s'annullano d'ordine infinito in un punto, v. [JK] o [GL]. La letteratura precedente a [JK] concernente l'operatore (1.3) quando il potenziale si assume illimitato è costituita da una successione di risultati in cui ognuno migliora di un po' il precedente. Tutti questi risultati sono ottenuti mediante il metodo di Carleman. Schechter e Simon [SS] nell'80 hanno provato che H ha la proprietà d'unicità debole se $V \in L^p_{loc}$, con $p > 2n - \frac{1}{3}$, se $n = 3,4,5$, e $p \geq n-2$, se $n \geq 6$. Amrein, Berthier e Georgescu [ABG] hanno provato l'unicità debole per H se $V \in L^p_{loc}$, $p > \frac{n}{2}$ se $n = 3,4$, $p \geq n-2$ se $n \geq 5$. Saut e Scheurer [Sa S] hanno provato lo stesso se $V \in L^p_{loc}$ e $p > \frac{2n}{3}$. Infine, Hörmander ha dimostrato in [H] che l'equazione

$$(1.10) \qquad Lu = \sum a_{ij}(x) D_{x_i} D_{x_j} u + \vec{b}(x) \cdot \nabla u + V(x) u = 0$$

ha la proprietà d'unicità debole se $a_{ij} \in C^{0,1}$, $\vec{b} \in L^q_{loc}$, $V \in L^p_{loc}$, con $p = 2$, $q > \frac{7}{2}$ se $n = 3$; $p > 2$, $q > 5$ se $n = 4$; $p = \frac{4n-2}{7}$, $q > \frac{3n-2}{2}$ se $n > 4$. Inoltre, sempre in [H] vengono provati alcuni risultati d'unicità forte. Su questi ritorneremo in una nota successiva.

In questa nota considereremo l'equazione (1.2) nel caso in cui $\vec{b} \equiv V \equiv 0$. Per risultati concernenti l'operatore di Schrödinger (1.3) rimandiamo al lavoro [GL]. Nel paragrafo successivo esporremo un nuovo approccio al problema dell'unicità. Su R^n si può indurre in modo naturale una geometria legata alla parte principale dell'operatore, lo studio delle cui proprietà locali conduce a informazioni molto forti sulle soluzioni dell'equazione $Lu = 0$. Il Teorema 2.1 nel § 2 è un esempio tipico e, in un modo che verrà chiarito più avanti, esso costituisce una forma ottimale di controllo locale sugli zeri di una soluzione di $Lu = 0$.

§ 2. RISULTATI

Nel seguito supporremo che Ω è un sottoinsieme aperto e connesso di R^n. Su Ω consideriamo soluzioni $u \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ dell'equazione

(2.1) $$Lu = \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = 0$$

dove sulla matrice $A(x) = (a_{ij}(x))$, $i,j = 1,\dots,n$, facciamo le seguenti ipotesi:

(i) esiste $\Gamma > 0$ tale che $\forall x,y \in \Omega$

(2.2) $$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \Gamma|x-y| \quad , \quad i,j = 1,\dots,n;$$

(ii) esiste $\lambda \in (0,1)$ tale che $\forall x \in \Omega$ e $\forall\, \xi \in R^n$

(2.3) $$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \lambda^{-1}|\xi|^2.$$

Per soluzione di (2.1) intendiamo una $u \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ tale che

$$(2.4) \qquad \int_\Omega \langle A(x)\nabla u(x), \nabla\phi(x)\rangle \, dx = 0 \qquad \forall\, \phi \in C_o^\infty(\Omega).$$

I risultati di questa nota sono di natura locale. Perciò nel seguito supporremo che la palla di centro l'origine e raggio due, B_2, sia contenuta in Ω. Quando scriveremo B_R e B_{2R} intenderemo palle concentriche di raggi rispettivamente R e 2R centrate in un punto $x_o \in B_1$, dove B_1 = palla di centro l'origine e raggio uno.

Il risultato principale è costituito dal seguente

<u>Teorema 2.1.</u> *Sia* $u \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *una soluzione di* (2.1). *Esiste una costante* C, *dipendente da* u, Γ, λ, n, *tale che per ogni palla* B_R, *per cui* $B_{2R} \subset B_1$, *si abbia*

$$(2.5) \qquad \int_{B_{2R}} u^2 dx \leq C \int_{B_R} u^2 dx \; .$$

<u>Osservazione</u>. La costante C in (2.5) non può essere indipendente da u. Per convincersene basta osservare che se $u_k = \mathrm{Re}\, z^k$ in R^2, allora $\Delta u_k = 0$ e

$$\int_{B_{2R}} u_k^2 dx \Big/ \int_{B_R} u_k^2 dx \;\cong\; 2^k$$

per palle B_R, B_{2R} centrate nell'origine.

La forza del Teorema 2.1 consiste nel fatto che su u non è fatta alcuna assunzione di segno. Infatti, se u fosse una soluzione non negativa allora (2.5) sarebbe una conseguenza banale della disuguaglianza di Harnack. Uno schizzo della prova del Teorema 2.1 verrà dato alla

fine di questa nota. La dimostrazione completa si trova in [GL].

Riportiamo qui sotto alcune conseguenze notevoli di (2.5).

Teorema 2.2. (Unicità forte). *Sia* $u \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *una soluzione di* (2.1). *Se* u *si annulla d'ordine infinito in* $x_0 \in \Omega$, *allora* $u \equiv 0$ *in* Ω. $|\nabla u|$ *non può annullarsi d'ordine infinito in un punto* $x_0 \in \Omega$ *a meno che* $u \equiv$ costante *in* Ω .

Prova. Supponiamo (ciò non è restrittivo) che $x_0 = 0$. Dalla (2.5) si ottiene per un fissato $R_0 < 1$

$$(2.6) \qquad \int_{B_{R_0}} u^2 dx \leq C \int_{B_{R_0 2^{-1}}} u^2 dx \leq \ldots \leq C^k \int_{B_{R_0 2^{-k}}} u^2\, dx \quad ,$$

dove B_{R_0}, $B_{R_0 2^{-1}}$, ..., $B_{R_0 2^{-k}}$ sono palle centrate in $x_0 = 0$. Sia ora $\alpha > 0$ tale che $C 2^{-n\alpha} = 1$, dove C è la costante in (2.5), (2.6). Moltiplicando e dividendo l'ultimo membro della (2.6) per la misura di $B_{R_0 2^{-k}}$ alla α, $|B_{R_0 2^{-k}}|^\alpha$, e indicando con ω_n la misura della palla unitaria centrata nell'origine, si ottiene

$$(2.7) \qquad \int_{B_{R_0}} u^2 dx \leq C^k |B_{R_0 2^{-k}}|^\alpha \frac{1}{|B_{R_0 2^{-k}}|^\alpha} \int_{B_{R_0 2^{-k}}} u^2 dx$$

$$= (\omega_n R_0^n)^\alpha \frac{1}{|B_{R_0 2^{-k}}|^\alpha} \int_{B_{R_0 2^{-k}}} u^2 dx \longrightarrow 0 \quad \text{quando } k \to \infty$$

se u si annulla d'ordine infinito in $x_0 = 0$. Quindi, se u si annulla

d'ordine infinito in $x_0 = 0$, si ha $u \equiv 0$ in B_{R_0}. Adesso, la connessione di Ω permette di concludere $u \equiv 0$ in Ω.

La seconda parte del Teorema 2.2 si dimostra in modo analogo una volta che si sia provato il prossimo teorema, anch'esso conseguenza del teorema 2.2. Prima di enunciarlo, però, abbiamo bisogno di alcune definizioni. Si dice che una funzione $w \geq 0$ è un peso A_p se per ogni palla $B_R \subset R^n$ si ha

$$(2.8) \qquad \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} w\, dx\right)\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} w^{-\frac{1}{p-1}}\, dx\right)^{p-1} \leq A$$

per una certa costante $A > 0$. I pesi A_p furono introdotti nel 1972 da Muckenhoupt [Muck] per caratterizzare quelle misure $d\mu = w\,dx$ su R^n per cui la funzione massimale di Hardy e Littlewood è continua da $L^p(d\mu)$ in sé. Dalla disuguaglianza di Hölder segue subito che se $p < q$ e $w \in A_p$, allora $w \in A_q$. La proprietà più sorprendente di cui godono i pesi A_p consiste nel loro comportamento automigliorativo. Cioè, se $w \in A_p$, allora esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $w \in A_{p-\varepsilon}$. Ciò deriva dal fatto che se $w \in A_p$, allora w verifica una disuguaglianza di Hölder alla rovescia, cioè esistono $\delta > 0$ e una costante $C > 0$ tale che per ogni palla $B_R \subset R^n$ si ha

$$(2.9) \qquad \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} w^{1+\delta}\, dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} w dx\right).$$

La prova che (2.8) implica (2.9) si può trovare ad es. in [CF]. Viceversa, si può far vedere (v. [Muck] o [CF]) che se w soddisfa (2.9), allora esiste $p > 1$ tale che $w \in A_p$. Infine, notiamo esplicitamente che usando la disuguaglianza di Hölder è immediato riconoscere che se $w \in A_p$, al

lora esiste $C > 0$ tale che

$$(2.10) \qquad \int_{B_{2R}} w\,dx \leq C \int_{B_R} w\,dx \quad ,$$

per ogni coppia di palle concentriche $B_R, B_{2R} \subset R^n$.

<u>Teorema 2.3.</u> *Sia* $u \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *una soluzione di* (2.1). *Se* $u \not\equiv 0$, *allora* $|u|$ *è localmente un peso* A_p. *Cioè, esiste un* $p > 1$ *e una costante* $A > 0$, *dipendente da* u, Γ, λ, n, *tali che per ogni palla* B_R, *tale che* $B_{2R} \subset B_1$, *si abbia*

$$(2.11) \qquad \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u|\,dx\right) \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u|^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} \leq A \, .$$

Se $u \not\equiv$ costante, *allora* $|\nabla u|$ *è localmente un peso* A_q. *Cioè, esiste un* $q > 1$ *e una costante* $B > 0$, *dipendente da* u, Γ, λ, n, *tali che*

$$(2.12) \qquad \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\nabla u|\,dx\right) \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\nabla u|^{-\frac{1}{q-1}}\,dx\right)^{q-1} \leq B,$$

per ogni palla B_R, *tale che* $B_{2R} \subset B_1$.

Osserviamo subito che usando la seconda parte del Teorema 2.3, e il fatto che, come già osservato, la (2.12) implica che $|\nabla u|$ soddisfa la condizione di "doubling" (2.10), si può concludere la prova del Teorema 2.2 ragionando come nella dimostrazione della sua prima parte.

<u>Prova del Teorema 2.3.</u> La (2.11) è immediata conseguenza della (2.5) e di ben note stime locali su soluzioni di equazioni ellittiche. Infatti, se $u \in H^{1,2}_{loc}(\Omega)$ è una soluzione di (2.1), allora c'è una costante $C = C(\lambda,n)$ tale che per ogni palla B_R, con $B_{2R} \subset B_1$, si ha

$$\sup_{B_R} u^2 \leq C \left(\frac{1}{|B_{2R}|} \int_{B_{2R}} u^2 \, dx\right) . \tag{2.13}$$

D'altra parte si ha banalmente per ogni $\delta > 0$

$$\left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u^{2(1+\delta)} dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq \sup_{B_R} u^2 . \tag{2.14}$$

(2.14), (2.13) e (2.5) implicano che u^2 verifica la (2.9). Quindi, per quanto prima detto, vale la (2.8) con $w = u^2$, per un certo $p > 1$. Usando la disuguaglianza di Schwarz si riconosce che $|u|$ soddisfa la (2.11). Per dimostrare la (2.12) si usa prima la disuguaglianza di Caccioppoli applicata alla soluzione $u-u_R$, dove $u_R = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u \, dx$, v. [M]. Esiste una costante $C > 0$, dipendente solo da λ,n, tale che per ogni palla B_R, con $B_{2R} \subset B_1$, si ha

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{C}{R^2} \int_{B_{2R}} |u-u_R|^2 dx . \tag{2.15}$$

Ora si usa la (2.5), applicata alla soluzione $u-u_R$ (qui occorre stare un po' attenti a liberare la dipendenza della costante C in (2.5) da u_R), ottenendo

$$\int_{B_{2R}} |u-u_R|^2 dx \leq C \int_{B_R} |u-u_R|^2 \, dx. \tag{2.16}$$

D'altra parte, la disuguaglianza di Poincaré dà

$$(2.17) \qquad \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|u-u_R|^2dx\right)^{1/2} \leq CR\left(\frac{}{|B_R|}\int_{B_R}|\nabla u|^{\frac{2n}{n+2}}dx\right)^{\frac{n+2}{2n}}.$$

Le (2.15), (2.16) e (2.17) dànno

$$(2.18) \qquad \left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|\nabla u|^2dx\right)^{1/2} \leq C\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|\nabla u|^{\frac{2n}{n+2}}dx\right)^{\frac{n+2}{2n}}.$$

(2.18) è una disuguaglianza di Hölder alla rovescia per $|\nabla u|^{\frac{2n}{n+2}}$ ($\frac{2n}{n+2} < 2$!), e quindi, seguendo ragionamenti già accennati, si conclude l'esistenza di un $q > 1$ tale che $|\nabla u|$ verifica la (2.12). Ciò completa la prova del teorema.

<u>Osservazione</u>. Va sottolineato che la disuguaglianza di Hölder alla rovescia per $|\nabla u|^{\frac{2n}{n+2}}$, o anche la (2.12), implicano maggiore integrabilità per $|\nabla u|$. Ciò è in relazione con un ben noto risultato di N. Meyers, v. [ME], o anche [G].

A questo punto diamo uno schizzo della prova del Teorema 2.1, rimandando a [GL] per i dettagli. Se u è una soluzione di (2.1) allora u è soluzione di

$$(2.19) \qquad \Delta_M u = \mathrm{div}_M(\nabla_M u) = 0$$

dove con M intendiamo R^n dotato della metrica riemanniana $g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$ generata dai coefficienti a_{ij} di $A(x)$. Se perciò indichiamo con $(a^{ij}) = A^{-1}$ risulta $g_{ij} = a^{ij}\,(\det A)^{\frac{1}{n-2}}$. Ricordiamo che

$$\Delta_M u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{g}\; g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) ,$$

dove $g = |\det(g_{ij})|$. Osserviamo che il tensore metrico $g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$ ha coefficienti Lipschitziani.

Ponendo

$$(2.20) \qquad r(x)^2 = g_{ij}(0) x_i x_j \quad , \quad \eta(x) = g^{kl} \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_l} ,$$

introduciamo una nuova metrica Lipschitziana su R^n definendo

$$(2.21) \qquad \overline{g_{ij}}(x) = \eta(x)\, g_{ij}(x).$$

Il punto chiave di tale riduzione è che nelle coordinate polari geodetiche con polo nell'origine di R^n, il tensore $\bar{g}_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$ prende la forma

$$(2.22) \qquad dr \otimes dr + r^2\, b_{ij}\, d\theta_i \otimes d\theta_j$$

con b_{ij} che verificano

$$(2.23) \qquad b_{ij}(0,0) = \delta_{ij} \quad , \quad \left|\frac{\partial}{\partial r} b_{ij}(r,\theta)\right| \leq \Lambda$$

e Λ dipende solo da Γ, λ, n in (2.2), (2.3).

Se $\bar{M}$ denota la varietà riemanniana $(R^n, \bar{g}_{ij})$, la (2.19) (e

quindi la (2.1)) è equivalente alla

$$(2.24)\qquad \mathrm{div}_{\bar{M}}\,(\mu(x)\,\nabla_{\bar{M}} u) = 0$$

dove μ è una funzione Lipschitziana che soddisfa alle

$$(2.25)\qquad \mu(0,0) = 1 \;,\quad \left|\frac{\partial}{\partial r}\,\mu(r,\theta)\right| \leq \Lambda \;,$$

$$(2.26)\qquad 0 < C_1 \leq \mu(x) \leq C_2 \;,$$

per x sufficientemente vicino all'origine.

Il fatto che valga la (2.22) implica che le palle geodesiche nella metrica $\bar{g}_{ij}$ coincidono con le palle euclidee centrate nell'origine. Ora definiamo

$$(2.27)\qquad H(r) = \int_{\partial B_r} \mu\, u^2\, dv_{\partial B_r} \;,$$

dove μ è la funzione in (2.24) e $dV_{\partial B_r}$ denota la misura di volume nella metrica $\bar{g}_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$ su ∂B_r. Differenziando (2.27) in r otteniamo

$$(2.28)\qquad H'(r) = \left[\frac{n-1}{r} + O(1)\right] H(r) + 2 \int_{\partial B_r} \mu\, u u_\rho\, dV_{\partial B_r} \,.$$

Nella (2.28), e in seguito, $O(1)$ denota una funzione limitata in valore assoluto da una costante che dipende solo da Γ,λ,n. Da (2.28) si ottiene

$$(2.29)\qquad \frac{d}{dr}\left(\frac{H(r)}{r^{n-1}}\right) = O(1) + 2\,\frac{\int_{\partial B_r} \mu\, u u_\rho\, dV_{\partial B_r}}{H(r)} \,.$$

Ora dalla (2.24) e dal teorema della divergenza si ha

$$(2.30)\qquad \int_{\partial B_r} \mu\, u u_\rho \, dV_{\partial B_r} = \frac{1}{2}\int_{B_r} \mathrm{div}_{\bar M}(\mu\, \nabla_{\bar M}(u^2))dv_{\bar M} = \int_{B_r} \mu|\nabla_{\bar M} u|^2 dv_{\bar M} .$$

Se perciò definiamo

$$(2.31)\qquad D(r) = \int_{B_r} u|\nabla_{\bar M} u|^2 \, dv_{\bar M}$$

possiamo riscrivere la (2.29) come

$$(2.32)\qquad \frac{d}{dr}\left(\ln \frac{H(r)}{r^{n-1}}\right) = O(1) + 2\,\frac{rD(r)}{H(r)}\,\frac{1}{r} = O(1) + 2\,\frac{N(r)}{r} ,$$

se definiamo $N(r) = \dfrac{rD(r)}{H(r)}$.

Vale il seguente

Teorema 2.4. (di monotonia). *Esiste una costante* C, *dipendente da* Γ,λ,n, *tale che la funzione*

$$(2.33)\qquad \bar N(r) = N(r)\exp(Cr) \quad , \quad r\in(0,1),$$

è monotona non decrescente su $(0,1)$.

Per la dimostrazione del Teorema 2.4 rimandiamo a [GL]. Osserviamo solo che per provare la (2.33) è sufficiente far vedere che

$$(2.34)\qquad N'(r) \geq -C\,N(r) \quad , \quad r\in(0,1).$$

La difficoltà maggiore nel provare la (2.34) consiste nel calcolo della derivata dell'energia cinetica D(r). Come dimostrato in [GL] si ottiene

$$(2.35)\qquad D'(r) = \left[\frac{n-2}{r} + O(1)\right] D(r) + 2\int_{\partial B_r} \mu\, u_\rho^2 \, dV_{\partial B_r} ,$$

e quindi, usando anche la (2.28),

$$(2.36) \qquad \frac{N'(r)}{D(r)} = \frac{D'(r)}{D(r)} + \frac{1}{r} - \frac{H'(r)}{H(r)} =$$

$$= 2\,\frac{\int_{\partial B_r} \mu\, u_\rho^2\, dV_{\partial B_r}}{D(r)} - 2\,\frac{\int_{\partial B_r} \mu\, uu_\rho\, dv_{\partial B_r}}{\int_{\partial B_r} \mu u^2 dv_{\partial B_r}} + O(1)$$

$$= 2\left\{\frac{\int_{\partial B_r} \mu u_\rho^2\, dv_{\partial B_r}}{\int_{\partial B_r} \mu uu_\rho dv_{\partial B_r}} - \frac{\int_{\partial B_r} \mu uu_\rho dv_{\partial B_r}}{\int_{\partial B_r} \mu u^2 dv_{\partial B_r}}\right\} + O(1) \geq O(1),$$

in quanto, per la disuguaglianza di Schwarz, la differenza fra parentesi graffe al penultimo membro della (2.36) è ≥ 0. Dalla (2.36) si ottiene subito la (2.34). Per concludere la dimostrazione del Teorema 2.1 si procede così. In (2.37)integriamo fra R e 2R, con $2R < 1$.

$$(2.37) \qquad \int_R^{2R} \frac{d}{dr}\left(\ln \frac{H(r)}{r^{n-1}}\right) dr = O(1)R + 2\int_R^{2R} \bar{N}(r) e^{-Cr} \frac{dr}{r} \;,$$

al secondo membro abbiamo usato la (2.33). Per il Teorema 2.3 otteniamo quindi

$$(2.38) \qquad \ln\left(\frac{H(2R)}{H(R)}\, 2^{1-n}\right) \leq C_1 + 2 \ln 2\, \bar{N}(1).$$

Esponenziando la (2.35) abbiamo

$$H(2R) \leqq 2^{n-1} \exp[C_1 + 2\ln 2\bar{N}(1)]\ H(R). \tag{2.39}$$

Integrando in R la (2.39) otteniamo la (2.5).

BIBLIOGRAFIA

$[Ag]_1$ S. AGMON, Lower bounds for solutions of Schrödinger type equations in unbounded domains, Proc. of International Conference of Functional Analysis and related topics, (1969), Univ. Tokyo Press, Tokyo.

$[Ag]_2$ S. AGMON, Lower bounds for solutions of Schrödinger equations, J. d'Analyse Math. 23 (1970), 1-25.

[ABG] W. AMREIN, A. BERTHIER and V. GEORGESCU, L^p inequalities for the Laplacian and unique continuation, Ann. Inst. Fourier, 31 (1981), 153-168.

[A] N. ARONSZAJN, A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second

order, J. Math. Pures Appl., 36 (1957), 235-249.

[AKS] N. ARONSZAJN, A. KRZYWICHI and I. SZARSKI, A unique continuation theorem for exterior differential forms on Riemannian manifolds, Arkiv för Matematik, 4 (1962), 417-453.

[C] T. CARLEMAN, Sur un problême d'unicité pour les systems d'equations aux derivees partielles a deux variables independentes, Ark. Mat. 26B (1939), 1-9.

[CF] R.R. COIFMAN and C.L. FEFFERMAN, Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math., 51 (1974), 241-250.

[CO] H.O. CORDES, Über die Bestimmtheit der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. IIa, 11 (1956), 239-258.

[GL] N. GAROFALO and F.H. LIN, Monotonicity properties of variational integrals, A_p weights and Unique continuation, Indiana Univ. Math. Journal, vol.35, 1986 (apparirã).

[G] M. GIAQUINTA, Multiple integrals in the Calculus of Variations and non-linear elliptic systems, Annals of Math. Studies, no. 105, Princeton Univ. Press (1983).

[He] E. HEINZ, Über die Eindentigkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung, Nach. Akad. Wiss. Göttingen, 1 (1955), 1-12.

[H] L. HÖRMANDER, Uniqueness theorems for second order elliptic differential equations, Comm. PDE, 8(1) (1983), 21-64.

[JK] D. JERISON and C.E. KENIG, Unique continuation and absence of positive eingenvalues for Schrödinger operators, Annals of Math., 121 (1985), 463-494.

[Ka] T. KATO, Growth properties of solutions of the reduced wave equation with variable coefficients, Comm. Pure and Appl. Math., 12 (1959), 403-425.

[K] C.E. KENIG, Continuation theorems for Schrödinger operators, Preprint.

[Me] N.G. MEYERS, An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations, Ann. Soc. Norm. Sup. Pisa (3), 17 (1963), 189-206.

[M] J. MOSER, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 14 (1961), 557-591.

[Muck] B.MUCKENHOUPT, Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Transactions AMS, 165 (1972), 207-226.

[Mu] C. MÜLLER, On the behavior of the solution of the differential equation $\Delta u = f(x,n)$ in the neighborhood of a point, Comm. Pure Appl. Math., 1 (1954), 505-515.

[P] A. PLIS, On non-uniqueness in Cauchy problem for on elliptic second order differential equation, Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences, 11, no. 3 (1963), 95-100.

[RS] M. REED and B. SIMON, Methods of Modern Math. Physics, vol. IV, Analysis of Operators, Academic Press (1978).

[SaS] J. SAUT and B. SCHEURER, Un théorème de prolongement unique pour des opérateurs elliptique dont les coefficients ne sont pas localment bornés, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 290 (1980), 598-599.

[SS] M. SCHECHTER and B. SIMON, Unique continuation for Schrödinger operators with unbounded potential, J. Math. Anal. Appl. 77 (1980), 482-492.

$[S]_1$ E.M. STEIN, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.

$[S]_2$ E.M. STEIN, Appendix to "Unique continuation..." by D. Jerison and C.E. Kenig, Annals of Math., 121 (1985), 489-494.

[VW] J. Von NEUMANN and E. WIGNER, Über merkwürdige diskrete Eigenwerte, Z. Phys. 30 (1929), 465-467.